# 1 Úvod do matematiky, úvod do funkcí

## 1.1 Logika.

1. *Doplňte tabulku:*

| $A$ | $B$ | $C$ | $A \vee (\neg C)$ | $(A\&B) \vee C$ | $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ | $A \vee (B \Leftrightarrow C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *true* | *true* | *true* | | | | |
| *true* | *true* | *false* | | | | |
| *true* | *false* | *true* | | | | |
| *true* | *false* | *false* | | | | |
| *false* | *true* | *true* | | | | |
| *false* | *true* | *false* | | | | |
| *false* | *false* | *true* | | | | |
| *false* | *false* | *false* | | | | |

2. *Definujme následující:*
   - *a: Anastazia*
   - *b: Bart*
   - *c: Cicero*
   - $B(x, y)$*: x patří y (ve smyslu y je vlastník x)*
   - $D(x, y)$*: x nenávidí y*
   - $C(x)$*: x je kočka*
   - $F(x)$*: x je divoký/á*
   - $P(x)$*: x je člověk*

   *Přepište následující věty v co nejpěknějším tvaru:*

   (a) $C(b)\&F(b)\&B(b, c)$
   (b) $\forall x,\ (C(x) \Rightarrow D(a, x))$
   (c) $\exists x,\ (C(x)\&F(x)\&B(x, c))$
   (d) $\forall x, \forall y,\ ((C(x)\&F(x)) \Rightarrow (P(y) \Rightarrow D(y, x)))$
   (e) $\forall x,\ (C(x) \Rightarrow \exists y,\ (P(y)\&B(x, y)))$
   (f) $\neg\exists x,\ (C(x)\&B(x, a))\&\exists x,\ (F(x) \Rightarrow D(a, x))$.

## 1.2 Opakování střední školy.

1. *Upravte výrazy a určete podmínky*

   (a)
   $$\frac{3x^{-2}y^{1/2}}{6x\sqrt{y^3}}\,\frac{2\sqrt[3]{x^5}y^2}{(xy)^{-1}}$$

   (b)
   $$\frac{a^2-b^2}{6a^2b^2} : \frac{a+b}{(3a)^2b}$$

2. *Vyřešte:*

   (a)
   $$2x^2 + 5x - 3 > 0$$

   (b)
   $$\frac{x+2}{4-x^2} \le 1$$

   (c)
   $$\log_3(x+1) = 2$$

   (d)
   $$\ln(x-5) < 0$$

   (e)
   $$\frac{27^{3x-2}}{243} = 81^{3x-7}$$

   (f)
   $$e^x < c,\ c \in \mathbb{R}$$

(g)
$$\cos x = -\sqrt{3}\sin x$$

(h)
$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

(i)
$$\sin x \geq \frac{1}{2}$$

*3. Určete (přirozený) definiční obor funkce f:*

(a)
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$$

(b)
$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

(c)
$$f(x) = \ln(x^2) - 2\ln x$$

(d)
$$f(x) = \ln(2x - x^2)$$

(e)
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}}$$

(f)
$$f(x) = \sqrt{3 - \log x}$$

(g)
$$f(x) = \frac{\ln x}{2x^2 + 3x - 2}$$

(h)
$$f(x) = \log_3\left(\frac{x}{1 - x}\right)$$

(i)
$$f(x) = \frac{x - 2}{2x + 6} + \sqrt[3]{x}$$

(j)
$$f(x) = \ln(\ln(\sin x))$$

(k)
$$f(x) = \frac{\ln(4 - x^2)}{e^x - 1} + \sqrt{3 - 2x}$$

(l)
$$f(x) = \sqrt[4]{x \cdot \ln(x + 2)}$$

*4. Načrtněte graf funkce f:*

(a)
$$f(x) = x^2 - 2$$

(b)
$$f(x) = 3 - x^2$$

(c)
$$f(x) = (x + 1)^2$$

(d)
$$f(x) = (2 - x)^2 + 1$$

(e)
$$f(x) = 3 + \sqrt{x - 1}$$

(f)
$$f(x) = \sqrt{2 - x}$$

(g)
$$f(x) = 2x - 3$$

(h)
$$f(x) = -x^3$$

(i)
$$f(x) = \sin 2x$$

(j)
$$f(x) = |\ln x|$$

(k)
$$f(x) = \frac{x + 4}{x + 2}$$

(l)
$$f(x) = x^2 - 6x + 10$$

(m)
$$f(x) = 2x - |1 - 2x|$$

### 1.3 Základní vlastnosti funkcí.

*1. Zjistěte, zda jsou následující funkce sudé, nebo liché (zdůvodněte):*

(a)
$$f(x) = x\sin x$$

(b)
$$f(x) = x^3 + 2$$

(c)
$$f(x) = xe^x$$

(d)
$$f(x) = \log\frac{2 - x}{2 + x}$$

*2. Nechť $f(x) = x^2$ a $g(x) = \sin x$. Najděte funkční předpisy a definiční obory funkcí:*

(a)
$$\frac{f}{g} \text{ a } f(g(x))$$

(b)
$$\frac{g}{f} \text{ a } g \circ f$$

3. *Napište předpisy $f \circ g$ a $g \circ f$ a nařtněte graf:*

   (a)
   $$f(x) = |x|,\ g(x) = e^x$$

   (b)
   $$f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = 1 - x$$

   (c)
   $$f(x) = x^3,\ g(x) = 2 + 3x$$

   (d)
   $$f(x) = \operatorname{sgn}(x),\ g(x) = \cos x$$

4. *Načrtněte graf funkce $f$, z grafu potom určete obor hodnot $\mathcal{H}(f)$, zda je funkce omezená, prostá a zda je na svém $\mathcal{D}(f)$ monotónní:*

   (a)
   $$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ \log 100, & x \geq 0 \end{cases}$$

   (b)
   $$f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 - 1, & x \in (-3, 0) \\ \log_2(x+1), & x \in \langle 0, 3) \end{cases}$$

5. *Načrtněte graf nějaké funkce s požadovanými vlastnostmi*

   (a) $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 4\rangle$, $f(4) = -6$, *$f$ je klesající na svém definičním oboru,* $\mathcal{H}(f) = \{-6\} \cup (-5, 2)$

   (b) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, *$f$ je sudá, $2-$ periodická a* $f(x) = x^2$ *pro* $x \in \langle 0, 1\rangle$.

   (c) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (-5, 2\rangle$, *$f$ je rostoucí na* $(-\infty, 1)$ *a klesající na* $(1, \infty)$. *Kolik je $f(1)$?*

   (d) $\mathcal{D}(f) = \langle -1, 1\rangle$, *$f$ je lichá,* $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *$f$ není monotónní na $\mathcal{D}(f)$.*

   (e)

### 1.4 Inverzní funkce.

1. *Určete definiční obor a rozhodněte, zda je funkce prostá*

   (a)
   $$f(x) = 3^{\frac{x+1}{x+3}}$$

   (b)
   $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{9 + x^2}}$$

   (c)
   $$f(x) = \begin{cases} |x - 3|, & x \in (-2, 4) \\ 5 - x, & x \in \langle 4, 8) \end{cases}$$

   (d)
   $$f(x) = \frac{\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4})}{4} + 1$$

2. *Určete definiční obor a načrtněte grafy funkcí, vyřešte přiloženou (ne)rovnici (pokud tam je).*

   (a)
   $$f(x) = \arcsin(1 - x)$$
   *Pro které $x$ platí $f(x) = \frac{2}{3}\pi$?*

   (b)
   $$g(x) = -2 \operatorname{arctg}(x + 1)$$
   *Pro které $x$ platí $g(x) = 3\pi$?*

   (c)
   $$h(x) = \arccos(x - 2) - \frac{\pi}{2}$$
   *Najděte všechna $x$, pro která $h(x) \leq -\frac{\pi}{4}$.*

   (d)
   $$j(x) = \cos(\arccos x)$$

3. *Určete definiční obor funkce. Rozhodněte, zda k dané funkci existuje funkce inverzní, pokud ano, určete její definiční obor a předpis*

   (a)
   $$f(x) = 3x - 2$$

   (b)
   $$f(x) = x^2,\ x \in \langle -4, 1\rangle$$

   (c)
   $$f(x) = 1 - \sqrt{x + 2}$$

   (d)
   $$f(x) = \arcsin^2 3x$$

   (e)
   $$f(x) = \arccos^2 x$$

   (f)
   $$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x},\ x \in \langle 2, \infty)$$

4. *Rozhodněte, zda k dané funkci existuje funkce inverzní, pokud ano, určete její definiční obor a předpis. Načrtněte graf funkce $f$ i $f^{-1}$ (pokud existuje)*

(a)
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ \cos \frac{x}{2}, & x \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{cases}$$

(b)
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ \frac{x}{x+1}, & x \geq 0 \rangle \end{cases}$$

# 2 Analýza funkce

## 2.1 Spojitost a limita.

1. *Rozhodněte, zda je funkce $f$ spojitá na své definičním oboru. Načrtněte graf funkce*

(a)
$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ \frac{1}{x}, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

(b)
$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0 \\ e^x, & x \leq 0 \end{cases}$$

2. *Spočítejte limity funkce*

(a)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x}$$

(b)
$$\lim_{x\to+\infty} \left(e^x - e^{-x}\right)$$

(c)
$$\lim_{x\to 0_+} \left(\ln x - \frac{1}{x}\right)$$

(d)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{arccotg} x}{\ln x}$$

(e)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + x}{2x^2 - 1}$$

(f)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + x}{x^3 - 1}$$

(g)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + x^3}{3x^2 - 1}$$

(h)
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 2x + 1}$$

(i)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x + 3}{e^x + 1}$$

(j)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x - 1} + 2}$$

(k)
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} - x\right)$$

(l)
$$\lim_{x\to-\infty} \left(3x^2 + 2x^3\right)$$

(m)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

(n)
$$\lim_{x\to+\infty} \left(3\sqrt{x^5} - \sqrt{x^3}\right)$$

(o)
$$\lim_{x\to 10} \frac{x^2 - 100}{x - 10}$$

(p)
$$\lim_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 3x}\right)$$

(q)
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$$

(r)
$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}{x^2 - 6x + 9}$$

(s)
$$\lim_{x\to+\infty} \left(3^x - 4^x\right)$$

(t)
$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{1 - x^2}$$

(u)
$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2}{5 - x}$$

(v)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x + 1}{x\mathrm{tg} x}$$

3. *Limity podruhé*

(a)
$$\lim_{x\to-\infty} e^{2x-x^2}$$
(b)
$$\lim_{x\to1} \arcsin\frac{2x}{x^2+1}$$
(c)
$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\frac{x+1}{x^2-1}$$
(d)
$$\lim_{x\to-\infty} \cos(\operatorname{arctg} x)$$
(e)
$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x + x}{2x}$$
(f)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x}$$
(g)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x}$$
(h)
$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$$

**2.2 Derivace.**

1. *Vypočtěte derivaci funkce $f$ v bodě $x_0$ pomocí definice*

(a)
$$f(x)=\sqrt{x},\ x_0=1.$$
(b)
$$f(x)=x^2,\ x_0=3.$$
(c)
$$f(x)=3-2x,\ x_0=5.$$
(d)
$$f(x)=x^2,\ x_0\in\mathbb{R}.$$

2. *Zderivujte následující funkce, pokud je to možné, derivace zjednodušte*

(a)
$$f(x)=x^5-4x^3-2x+4\pi$$
(b)
$$f(x)=\sin x-2^x$$
(c)
$$f(x)=\frac{3^x}{2^x}$$
(d)
$$f(x)=x^3\ln x$$
(e)
$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$$
(f)
$$f(x)=x\sqrt{x}$$
(g)
$$f(x)=x^2\cos x$$
(h)
$$f(x)=\frac{1+e^x}{1-e^x}$$
(i)
$$f(x)=\frac{x2^x}{\sqrt{x}}$$
(j)
$$f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}$$
(k)
$$f(x)=\frac{x2^x}{\sqrt{x}}$$

3. *Zderivujte následující funkce, pokud je to možné, derivace zjednodušte*

(a)
$$f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$$
(b)
$$f(x)=\sqrt{\operatorname{arctg} x}$$
(c)
$$f(x)=\sqrt{x^2+a^2},\ a\in\mathbb{R}$$
(d)
$$f(x)=2\cos 4x$$
(e)
$$f(x)=\sin(3-x)^2$$
(f)
$$f(x)=\sin^2 x^2$$
(g)
$$f(x)=\operatorname{arctg}^2\frac{1}{x}$$
(h)
$$f(x)=\frac{1}{\ln x}$$
(i)
$$f(x)=e^{\frac{\sin x}{\cos x}}$$
(j)
$$f(x)=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$$
(k)
$$f(x)=\ln\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

4. *Zderivujte následující funkce, zjednodušte a určete definiční obor funkce i její derivace*

(a)
$$f(x) = 2x\sqrt{x - 4x^2}$$

(b)
$$f(x) = e^{\sqrt{x+1}}$$

(c)
$$f(x) = \ln|x|$$

(d)
$$f(x) = \operatorname{arccotg}\frac{2x}{x^2 - 1}$$

5. *Zderivujte*

(a)
$$f(x) = x^x$$

(b)
$$f(x) = \sin x^{x^2}$$

6. *Vypočtěte derivaci funkce $f$ v bodě $x_0$, nebo zdůvodněte, proč derivace neexistuje*

(a)
$$f(x) = \begin{cases} 2\ln x & x \in (0, 1\rangle, \\ x^2 - 1 & x > 1 \end{cases}$$

(b)
$$f(x) = \begin{cases} e^x - 2 & x \leq 0, \\ x^3 - 2x & x > 0 \end{cases}$$

(c)
$$f(x) = \begin{cases} \ln(-x) & x < -1, \\ \sqrt{x+2} - 1 & x \geq -1 \end{cases}$$

### 2.3 Využití derivací.

1. *Najděte rovnici tečny ke grafu funkce $f$ v bodě $x_0$.*

(a)
$$f(x) = x^2 + 4x + \frac{1}{x},\ x_0 = 1$$

(b)
$$f(x) = e^{x^2 - 3x},\ x_0 = 3$$

2. *Za jak dlouho se zdvojnásobí investice, která je ročne úročená $x$ procenty? Zkuste za pomocí derivace odvodit přibližné pravidlo.*

3. *Najděte rovnici tečny ke grafu funkce $f$ v bodě $x_0$.*

(a)
$$f(x) = \frac{2x+1}{3x+2},\ x_0 = 0$$

(b)
$$f(x) = \sin x - x,\ x_0 = \pi$$

4. *Použitím l'Hospitalova pravidla spočtěte následující limity*

(a)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$$

(b)
$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln^2 x}{x - 1}$$

(c)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^3 + x^2 - 6x}$$

(d)
$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln x}{\ln(\sin x)}$$

(e)
$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin 2\pi x}{\ln x}$$

(f)
$$\lim_{x\to 0_+} x \ln x$$

(g)
$$\lim_{x\to 1} (1 - x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$$

(h)
$$\lim_{x\to 0_+} x^{\operatorname{tg} x}$$

(i)
$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

(j)
$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right)$$

(k)
$$\lim_{x\to\infty} \left(x^2 - 2\ln x\right)$$

(l)
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \cot x\right)$$

5. *Vypočtěte limity v krajních bodech definičního oboru*

(a) $$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}$$

(b) $$f(x) = \frac{e^x}{x-1}$$

(c) $$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

(d) $$f(x) = \arccos\frac{x-5}{2x-4}$$

(e) $$f(x) = \frac{1-\ln x}{x-e}$$

(f) $$f(x) = \sqrt{x}\text{arccotg}x$$

### 2.4 Průběh funkce.

1. *Určete intervaly monotonie funkce, najděte její lokální extrémy*

(a) $$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$$

(b) $$f(x) = 4x^2 - x^4$$

(c) $$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

(d) $$f(x) = e^{-x^2}$$

(e) $$f(x) = x\ln x$$

(f) $$f(x) = x + e^{-x}$$

(g) $$f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

(h) $$f(x) = e^{2x} - 10e^x + 12x$$

2. *Najděte globální extrémy funkce $f$ na zadaném intervalu*

(a) $$f(x) = x^3 - x^2 + 1,\ x \in \langle -2, 2\rangle$$

(b) $$f(x) = \frac{x^2+4}{x},\ x \in \langle 1, 3\rangle$$

(c) $$f(x) = x\sqrt{4-x},\ x \in \langle -2, 4\rangle$$

(d) $$f(x) = x + \frac{1}{x-1},\ x \in \langle -4, 0\rangle$$

3. *Určete intervaly monotonie funkce a najděte její lokální extrémy*

(a) $$f(x) = \sqrt[3]{(x^4-1)^2}$$

(b) $$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

4. *Určete intervaly, na kterých je daná funkce konvexní a na kterých je konkávní, určete inflexní body*

(a) $$f(x) = x^3 + 2x^2 - 2$$

(b) $$f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

5. *Najděte asymptoty grafu funkce $f$*

(a) $$f(x) = e^{x-1} + 2$$

(b) $$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

(c) $$f(x) = \ln x$$

(d) $$f(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2+1}$$

(e) $$f(x) = x + \frac{1}{x^2}$$

(f) $$f(x) = x\,\text{arctg}\,x$$

6. *Nakreslete graf funkcí zadaných vlastností*

   (a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 4\}$, *sudá, omezená,* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$, $f'(0) = 0$, $f(2) = 1$, $f'(x) < 0$ *pro* $x > 4$

   (b) $D(f) = (0,\infty)$, $f(5) = 0$, $f'(x) < 0$ *na* $(0,4)$ *a* $f'(x) > 0$ *na* $(4,\infty)$, $\lim_{x\to 0_+} f(x) = 5$

   (c) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \langle -1,1\rangle$, *lichá, konkávní na* $(-\infty,-1)$, $f'(2) = 0$, $\lim_{x\to 1_+} f(x) = \infty$

   (d) $D(f) = \mathbb{R}$, *sudá, nemá derivaci v bodě* $x = 0$, $f' > 0$ *na intervalu* $(-\infty,-1)$, $f(0) = -2$

7. *Vyšetřete průběh funkce*

   (a)
   $$f(x) = x^2 e^{-x}$$

   (b)
   $$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

   (c)
   $$f(x) = (1-x)\ln(x-1)$$

   (d)
   $$f(x) = (x^2 - 6x + 10)e^x$$

   (e)
   $$f(x) = x + \operatorname{arctg} x$$

   (f)
   $$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$$

   (g)
   $$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

   (h)
   $$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{x^2}$$

   (i)
   $$f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$$

   (j)
   $$f(x) = \frac{1-x^3}{x^2}$$

# 3 Aplikace derivace

## 3.1 Newtonova metoda.

1. *Graficky odhadněte počet kořenů rovnice:*

   (a)
   $$x^2 - 4 - \frac{1}{x} = 0$$

   (b)
   $$\operatorname{tg} x + \frac{1}{(1-x)^2} = 0$$

2. *Graficky určete počet řešení rovnice. Dále ověřte, že daný interval je separační a ověřte předpoklady Newtonovy metody a spočtěte první aproximaci řešení*

   (a)
   $$2x^3 - 3x + 5 = 0,\ \langle -2,-1\rangle$$

   (b)
   $$20 + 3x - 2x^3 = 0,\ \langle 2,3\rangle$$

   (c)
   $$e^x - 3 + x^2 = 0,\ \langle 0,1\rangle$$

   (d)
   $$x + e^x + 1 = 0,\ \langle -2,-1\rangle$$

3. *Graficky určete počet řešení rovnice a odhadněte separační interval délky jedna pro nejmenší kladný z nich. Ověřte předpoklady Newtonovy metody a spočtěte první aproximaci řešení*

   (a)
   $$x \log_2 x = 1$$

   (b)
   $$\sqrt{x} - e^{2-x} = 0$$

## 3.2 Taylorův polynom.

1. *Napište Taylorův polynom* $n-$*tého řádu dané funkce v daném bodě.*

(a)
$$f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = 1,\ n = 3$$

(b)
$$f(x) = \operatorname{arctg} x,\ x_0 = 1,\ n = 2$$

(c)
$$f(x) = xe^{-x},\ x_0 = 0, n = 4$$

(d)
$$f(x) = \sin 2x,\ x_0 = \frac{\pi}{2},\ n = 3$$

2. *Pomocí Taylorova polynomu 2. řádu ve vhodném bodě aproximujte hodnotu*

(a)
$$\ln(1,1)$$

(b)
$$\operatorname{arccotg}(0,1)$$

(c)
$$\sqrt{0,9}$$

(d)
$$\cos 5^\circ$$

### 3.3 Diferenciál.

1. *Napište diferenciál funkce $f$ v bodě $x_0$*

(a)
$$f(x) = x^2 - 2x,\ x_0 = 3$$

(b)
$$f(x) = \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{3}$$

(c)
$$f(x) = \frac{1}{x^2},\ x_0 = 1$$

(d)
$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right),\ x_0 = 3$$

2. *Pomocí diferenciálu určete přibližnou hodnotu*

(a)
$$e^{0,15}$$

(b)
$$\operatorname{arctg}(1,07)$$

3. *Odhadněte pomocí diferenciálu přírůstek funkce. Načrtněte graf funkce a do obrázku vyznačte diferenci, diferenciál a chybu, které se dopouštíte*

(a)
$$\sin\left(\frac{61}{180}\pi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) =?$$

(b)
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{0,8} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1} =?$$

# 4 Křivky

### 4.1 Parametrizace.

1. *Napište dané parametrizace*

(a) *Jsou dány body $A = (1, 2)$ a $B = (-1, 1)$. Napište parametrizaci přímky $AB$, úsečky $AB$ a polopřímky $AB$.*

(b) *Napište parametrizaci kružnice se středem $S = (-1, 4)$ a poloměrem $r = 5$.*

(c) *Napište paremafrizaci elipsy se středem $S = (3, 0)$ a délkami poloos $a = 4$ a $b = 3$. Hlavní poloosa je rovnoběžná s osou $y$.*

(d) *Napište parametrizaci grafu funkce $f(x) = \arcsin x$, $x \in \langle 0, \frac{\pi}{4})$.*

2. *Určete křivku popsanou následující rovnicí a najděte její parametrizaci*

(a)
$$x^2 - 2x + y^2 + 6y = 0$$

(b)
$$4x^2 - 8x + y^2 + 2y - 4 = 0$$

(c)
$$y^2 - 12y + x = 0$$

### 4.2 Tečný vektor.

1. *Načrtněte parametricky zadanou křivku a spočtěte tečný vektor v bodě $T$:*

(a)

$$\mathcal{K}: \begin{array}{l} x = 2\cos t, \\ y = \sin t,\ t \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle \end{array}$$
$$T = (-2, 0)$$

(b)

$$\mathcal{K}: \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\cos t - 2, \\ y = \frac{1}{2}\sin t + 1,\ t \in \langle 0, \pi \rangle \end{array}$$
$$T = \left(-2, \frac{3}{2}\right)$$

2. *Načrtněte křivku danou parametrizací*

(a) $\varphi(t) = \left(\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2}\right),\ t \in (0, \infty)$. *Spočtěte tečný vektor ke křivce odpovídající parametru* $t = 1$ *a zakreslete danou tečnu.*

(b) $\varphi(t) = \left(\cos t, t - \frac{\pi}{2}\right),\ t \in (0, \pi)$. *Napište tečný vektor ke křivce v průsečíku s osou* $x$. *Tento vektor nakreslete do obrázku.*

(c) $\varphi(t) = (t^3, \ln t),\ t \in (0, e)$. *Napište tečný vektor ke křivce v průsečíku s osou* $x$. *Tento vektor nakreslete do obrázku křivky.*

# 5 Integrály

## 5.1 Neurčité a určité integrály.

1. *Spočtěte:*

(a)
$$\int \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x$$

(b)
$$\int \sqrt{x}\ \mathrm{d}x$$

(c)
$$\int 7^x\ \mathrm{d}x$$

(d)
$$\int \sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

2. *Spočtěte:*

(a)
$$\int (3x^2 + x - 7)\ \mathrm{d}x$$

(b)
$$\int \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^2\ \mathrm{d}x$$

(c)
$$\int \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}\ \mathrm{d}x$$

(d)
$$\int \frac{-5}{1 + x^2}\ \mathrm{d}x$$

(e)
$$\int \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{e^x}{3}\right)\ \mathrm{d}x$$

(f)
$$\int \frac{x^2}{1 + x^2}\ \mathrm{d}x$$

(g)
$$\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}\ \mathrm{d}x$$

(h)
$$\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1}\ \mathrm{d}x$$

3. *Per-partes*

(a)
$$\int x e^x\,\mathrm{d}x$$

(b)
$$\int (x^2 + 1)\cos x\,\mathrm{d}x$$

(c)
$$\int x \sin x\,\mathrm{d}x$$

(d)
$$\int \ln x\,\mathrm{d}x$$

(e)
$$\int x^3 \ln x\,\mathrm{d}x$$

(f)
$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

(g)
$$\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x$$

(h)
$$\int \sin 2x \sin x \,\mathrm{d}x$$

(i)
$$\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x$$

4. *Lineární substituce*

(a)
$$\int \sin 3x \,\mathrm{d}x$$

(b)
$$\int e^{5x} \,\mathrm{d}x$$

(c)
$$\int (3x-5)^8 \,\mathrm{d}x$$

(d)
$$\int \frac{1}{x^2+4} \,\mathrm{d}x$$

5. *Substituce*

(a)
$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$$

(b)
$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} \,\mathrm{d}x$$

(c)
$$\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} \,\mathrm{d}x$$

(d)
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x}} \,\mathrm{d}x$$

(e)
$$\int \sin^3 x \,\mathrm{d}x$$

(f)
$$\int \frac{\mathrm{tg} x}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x$$

(g)
$$\int \mathrm{tg} x \,\mathrm{d}x$$

(h)
$$\int \frac{5+\ln x}{x} \,\mathrm{d}x$$

(i)
$$\int \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$$

(j)
$$\int x e^{-x^2} \,\mathrm{d}x$$

(k)
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x$$

(l)
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x$$

6. *Směska*

(a)
$$\int e^{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$$

(b)
$$\int \mathrm{arctg}\, x \,\mathrm{d}x$$

(c)
$$\int \ln(7x-5) \,\mathrm{d}x$$

(d)
$$\int x \,\mathrm{arctg}\, x \,\mathrm{d}x$$

7. *Integrace racionálních funkcí*

(a)
$$\int \frac{1}{x^2+4} \,\mathrm{d}x$$

(b)
$$\int \frac{1}{x^2-4} \,\mathrm{d}x$$

(c)
$$\int \frac{1}{x^2-4x+4} \,\mathrm{d}x$$

(d)
$$\int \frac{2}{x^2+2x+5} \,\mathrm{d}x$$

(e)
$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$$
(f)
$$\int \frac{x+3}{x^2-4x+8}\,\mathrm{d}x$$
(g)
$$\int \frac{3x+2}{8x-x^2-12}\,\mathrm{d}x$$
(h)
$$\int \frac{1+2x-x^2}{x^2(2x+1)}\,\mathrm{d}x$$
(i)
$$\int \frac{x^2+3x-4}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$$
(j)
$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$
(k)
$$\int \frac{x^4-4x^3+2x^2+2x+1}{x^2-x}\,\mathrm{d}x$$

8. *Směska číslo dva*

(a)
$$\int \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
(b)
$$\int \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$$
(c)
$$\int (2x-1)^4\,\mathrm{d}x$$
(d)
$$\int e^x \sin x\,\mathrm{d}x$$
(e)
$$\int \frac{x^3}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$$
(f)
$$\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$$
(g)
$$\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
(h)
$$\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{x}}\,\mathrm{d}x$$
(i)
$$\int \sqrt{x}\ln x\,\mathrm{d}x$$
(j)
$$\int \arccos x\,\mathrm{d}x$$

9. *Určitý integrál*

(a)
$$\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$$
(b)
$$\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$$
(c)
$$\int_1^3 \frac{18x^2-2}{3x-1}\,\mathrm{d}x$$
(d)
$$\int_{-1}^1 \left(xe^{x\,\mathrm{arctg}\,x}+e^x\right)\,\mathrm{d}x$$
(e)
$$\int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x$$
(f)
$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
(g)
$$\int_e^{e^2} \frac{\ln^4 x}{x}\,\mathrm{d}x$$
(h)
$$\int_{-1}^0 2x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

10. *Nevlastní integrál*

(a)
$$\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$$
(b)
$$\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$$
(c)
$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$
(d)
$$\int_{-\infty}^0 xe^{2x}\,\mathrm{d}x$$

(e)
$$\int_0^\infty e^x \,\mathrm{d}x$$

(f)
$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$$

(g)
$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$$

(h)
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+5x+6}$$

11. *Numerická integrace – použijte lichoběžníkovou metodu s délkou kroku h*

(a)
$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x, \quad h = \frac{\pi}{4}$$

(b)
$$\int_{-1}^{1} x^2 + 2x \,\mathrm{d}x, \quad h = \frac{1}{2}$$

### 5.2 Aplikace integrálu.

1. *Vypočítejte obsah plochy ohraničené zadanými křivkami*

   (a) *graf funkce* $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$, $x \in \langle -2, 0\rangle$ *a osa* $x$

   (b) *graf funkce* $f(x) = xe^{-x}$, *osa* $x$, *v polorovině* $x \geq 0$

   (c) *grafy funkcí* $f(x) = 3 - x$ *a* $g(x) = \frac{2}{x}$

   (d) *grafy funkcí* $f(x) = x^2$ *a* $g(x) = x + 2$

   (e) *grafy funkcí* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *a* $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

   (f) *grafy funkcí* $f(x) = -3 + 8x - 2x^2$ *a* $g(x) = 6 - 4x + x^2$

2. *Vypočítejte délku křivky* $\mathcal{K}$

   (a)
   $$\mathcal{K}: \begin{array}{l} x = t \\ y = t^3, \ t \in \langle -1, 1\rangle \end{array}$$

   (b)
   $$\mathcal{K}: \begin{array}{l} x = \sin t + \cos t, \\ y = \sin t - \cos t, \ t \in \langle 0, \pi\rangle \end{array}$$

3. *Vypočítejte délku části grafu funkce* $f$

   (a) $f(x) = \sqrt{x}^3$, $x \in \left\langle 0, \frac{4}{3}\right\rangle$

   (b) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$, $x \in \langle 2, 5\rangle$