Extrémy

Václav Mácha

Vysoká škola chemicko-technologická

Extrémy: jednodimenzionální případ

Definice

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Řekneme, že* f *nabývá své* lokální maximum *(resp. minimum) v bodě* x_0 *pokud existuje* $\varepsilon > 0$ *tak, že* $f(x_0) > f(x)$ *(resp.* $f(x_0) < f(x)$*) pro každé* $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$.

Definice

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je třídy* C^1. Stacionární bod f *je bod* x_0 *takový, že* $f'(x_0) = 0$.

Lemma

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je třídy* C^2 *a nechť* x_0 *je její stacionární bod. Pak pokud* $f''(x_0) > 0$, f *nabývá své lokální minimum v* x_0 *a pokud* $f''(x_0) < 0$, f *nabývá své lokální maximum v* x_0.

Extrémy: jednodimenzionální případ

Definice

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Řekneme, že* f *nabývá své* lokální maximum *(resp. minimum) v bodě* x_0 *pokud existuje* $\varepsilon > 0$ *tak, že* $f(x_0) > f(x)$ *(resp.* $f(x_0) < f(x)$*) pro každé* $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$.

Definice

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je třídy* C^1. Stacionární bod f *je bod* x_0 *takový, že* $f'(x_0) = 0$.

Lemma

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je třídy* C^2 *a nechť* x_0 *je její stacionární bod. Pak pokud* $f''(x_0) > 0$, f *nabývá své lokální minimum v* x_0 *a pokud* $f''(x_0) < 0$, f *nabývá své lokální maximum v* x_0.

Příklad

- Nalezněte lokální maxima a minima funkce $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}x$.

Definice

Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *nabývá své* (globální) maximum *v* x_0 *pokud* $f(x_0) \geq f(x)$ *pro všechna* $x \in \mathrm{Dom}\ f$. (Globální) minimum *je definováno podobně.*

Lemma

Nechť f *je spojitá funkce definována na* $[a, b] \subset \mathbb{R}$. *Pak* f *nabývá svého maxima a minima* $[a, b]$.

Příklady

- Najděte globální extrémy funkce $f(x) = x^2 e^x$.
- Najděte globální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 12x$ na intervalu $[-3, 5]$.

Monopoly: Total profit je dán jako $TP = TR - TC$, kde TR je total revenue a TC je total costs. Nechť Q je množství produkovaného zboží. Přirozeně, $TR = P * Q$ kde P je tržní cena zboží.
Předpokládejme, že $TC = 500\,000 + 400Q + 0,04Q^2$ (fix costs, variable costs, ...).

Monopoly: Total profit je dán jako $TP = TR - TC$, kde TR je total revenue a TC je total costs. Nechť Q je množství produkovaného zboží.
Přirozeně, $TR = P * Q$ kde P je tržní cena zboží.
Předpokládejme, že $TC = 500\,000 + 400Q + 0,04Q^2$ (fix costs, variable costs, ...).
Monopoly – cena se snižuje s množtvím produkovaného zboží, řekněme, že $P = 10\,000 - 0,1Q$
Cíl: zajistit největší profit.

Monopoly: Total profit je dán jako $TP = TR - TC$, kde TR je total revenue a TC je total costs. Nechť Q je množství produkovaného zboží.
Přirozeně, $TR = P * Q$ kde P je tržní cena zboží.
Předpokládejme, že $TC = 500\,000 + 400Q + 0,04Q^2$ (fix costs, variable costs, ...).
Monopoly – cena se snižuje s množtvím produkovaného zboží, řekněme, že $P = 10\,000 - 0,1Q$
Cíl: zajistit největší profit.
Monopoly: $MR := TR'(Q) < P(Q)$

Konkurenční trh: Cena výrobku je nezávislá na množství. Mějme továrnu, která produkuje Q kusů výrobku, cena na trhu je 500 za kus. Nákladová funkce má tvar

$$N(Q) = 40000 + 20Q - Q^2.$$

Jaký je maximální možný zisk a kolik výrobků se musí vyrobit, aby se jej dosáhlo?

Konkurenční trh: Cena výrobku je nezávislá na množství. Mějme továrnu, která produkuje Q kusů výrobku, cena na trhu je 500 za kus. Nákladová funkce má tvar

$$N(Q) = 40000 + 20Q - Q^2.$$

Jaký je maximální možný zisk a kolik výrobků se musí vyrobit, aby se jej dosáhlo?

Omezení rozpočtem: Funkce

$$f(x, y) = \frac{80x}{5 + x} + \frac{40y}{10 + y} - 2x - 2y$$

udává zisk (v tisících kč) v závislosti na reklamní kampani za x tisíců kč v televizi a y tisíců kč v rádiu. Jak rozdělit reklamní rozpočet 25000 kč tak, aby byl zisk maximální?

Extrémy – více dimenzí

Definice

Nechť $f : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Řekneme, že* f *nabývá* lokální maximum *v bodě* $x_0 \in M^0$ *pokud existuje* $r > 0$ *takové, že* $f(x_0) \geq f(x)$ *pro všechna* $(x) \in B_r(x_0)$. Lokální minimum *je definováno analogicky.*

Definice

Nechť $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *je třídy* C^1. **Stacionární bod** f *je bod* x_0 *takový, že* $\nabla f(x_0) = 0$.

Lemma

Nechť $f \in C^2$ *a nechť* x_0 *je její stacionární bod. Potom*

- *pokud je* $\nabla^2 f(x_0)$ *pozitivně definitní, má* f *lokální minimum v bodě* x_0,
- *pokud je* $\nabla^2 f(x_0)$ *negativně definitní, má* f *lokální maximum v bodě* x_0,
- *pokud je* $\nabla^2 f(x_0)$ *indefinitní, není v* x_0 *žádný extrém,*

Příklad

- Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = y^3 + x^2 - 6xy + 3x + 6y - 7.$$

- Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2y^2 - x^2 - y^2$$

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *nabývá své* (globální) maximum *v* x_0 *pokud* $f(x_0) \geq f(x)$ *pro všechna* $x \in \mathrm{Dom}\ f$. (Globální) minimum *je definováno analogicky.*

Příklad

- Společnost vyrábí dva produkty A a B, které prodává za \$10, respective za \$9 za jednotku. Náklady na výrobu x jednotek A a y jednotek B jsou

$$400 + 2x + 3y + 0.01(3x^2 + xy + 3y^2).$$

Najděte hodnoty x a y které maximalizují zisk.

Definice

Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ *je* konvexní *pokud pro všechna* $x, y \in M$ *a všechna* $\lambda \in (0, 1)$ *platí*

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in M.$$

Definice

Nechť $\mathrm{Dom}\ f \subset \mathbb{R}^n$ *je konvexní. Řekneme, že* f *je konvexní, pokud*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

pro všechna $x, y \in \mathrm{Dom}\ f$ *a* $\lambda \in (0, 1)$. *Funkce je striktně konvexní, pokud*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Funkce f *je (striktně) konkávní, pokud* $-f$ *je (striktně) konvexní.*

Několik pozorování

- Druhý gradient je pozitivně (negativně) definitní $\Rightarrow$ funkce je striktně konvexní (konkávní).
- Funkce je konvexní na svém definičním oboru $\Rightarrow$ každé lokální minimum je globálním minimem.
- Funkce je konkávní na svém definičním oboru $\Rightarrow$ každé lokální maximum je globální maximum.

Příklad

- Monopolista nabízí dva různé produkty, každý má následující poptávkovou funkci

$$q_1 = 14 - \frac{1}{4}p_1$$
$$q_2 = 24 - \frac{1}{2}p_2$$

Společná nákladová funkce je

$$C(q_1, q_2) = q_1^2 + 5q_1q_2 + q_2^2.$$

a funkce zisku je

$$\pi = p_1q_1 + p_2q_2 - C(q_1, q_2).$$

Najděte, pro jaké ceny p_1 a p_2 je zisk maximální.

Globální extrémy vzhledem k množině

Maximalizce zisku s omezením: Měsíční náklady továrny, která vyrábí x kusů jednoho výrobku a y kusů druhého výrobku, je (v tisících korunách)

$$f(x, y) = 400 + x + 2y + 0,005x^2 + 0,05y^2 + 0,007xy$$

Její zisk z jednoho kusu x je 5000 korun a z jednoho kusu y je 7000 korun. Pokud jede továrna na plný výkon, vyrobí za měsíc 1000 výrobků. Jaký je maximální možný zisk?

Lemma

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ *a nechť* $f : M \to \mathbb{R}$. *Pak* f *nabývá svého* **minima na** M *v bodě* $(x_0, y_0) \in \mathbb{M}$ *pokud*

$$\forall (x, y) \in M, \ f(x_0, y_0) \leq f(x, y).$$

Podobně, f *nabývá* **maxima na** M *v bodě* $(x_0, y_0) \in \mathbb{M}$ *pokud*

$$\forall (x, y) \in M, \ f(x_0, y_0) \geq f(x, y).$$

Příklady

- Najděte maximum a minimum funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$$

na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \in [-1, 3],\ y \in [0, 2]\}$.

Příklady

- Najděte maximum a minimum funkce

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$$

na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \in [-1,3],\ y \in [0,2]\}$.

- Najděte maximum a minimum

$$f(x,y) = (x^2 + y)e^y$$

na množině

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq \frac{1}{3}x,\ y \leq 3x,\ y \leq 5 - x\}.$$

Příklady

- Najděte maximum a minimum funkce

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$$

na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \in [-1,3],\ y \in [0,2]\}$.

- Najděte maximum a minimum

$$f(x,y) = (x^2 + y)e^y$$

na množině

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq \frac{1}{3}x,\ y \leq 3x,\ y \leq 5 - x\}.$$

- Měla by předchozí funkce maximum a minimum na množině

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > \frac{1}{3}x,\ y < 3x,\ y < 5 - x\}?$$

Příklad

- Nejděte extrémy

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$$

na oblasti popsané nerovností

$$x^2 + y^2 \leq 16.$$

Příklad

- Nejděte extrémy

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$$

na oblasti popsané nerovností

$$x^2 + y^2 \leq 16.$$

Věta (Lagrangeovy multiplikátory)

Nechť $f : \mathrm{Dom}\ f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je* C^1 *funkce definována na okolí*

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) = 0\}$$

kde $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je* C^1 *funkce. Pokud* f *nabývá extrému vzhledem k množině* M *v* $x_0 \in \mathbb{M}$, *pak existuje* $\lambda \in \mathbb{R}$ *takové, že*

$$\nabla f(x_0) + \lambda \nabla g(x_0) = 0,$$

nebo $\nabla g(x_0) = 0$.

Příklady

- Nalezněte extrémy $f(x, y) = x^2 + 2xy$ na jednotkovém kruhu.
- Najděte extrémy

$$f(x, y, z) = y^2 - 10z$$

vzhledem k vazbě

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36.$$

Pasti a triky

- nalezněte extrémy

$$f(x, y) = e^{x^2+y}$$

vzhledem k množině popsané rovnicí

$$y + x^3 = 0.$$

Pasti a triky

- nalezněte extrémy

$$f(x, y) = e^{x^2+y}$$

vzhledem k množině popsané rovnicí

$$y + x^3 = 0.$$

Lemma

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená a uzavřená množina a nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je spojité. Pak f nabývá na M svého maxima a minima.

Pasti a triky

- nalezněte extrémy

$$f(x,y) = e^{x^2+y}$$

vzhledem k množině popsané rovnicí

$$y + x^3 = 0.$$

Lemma

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená a uzavřená množina a nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je spojité. Pak f nabývá na M svého maxima a minima.

- Najděte extrémy funkce $f(x,y) = x + y$ na $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x^3 + y^3 - 2xy = 0,\, x \geq 0,\, y \geq 0\right\}$.

Příklady

- Nalezněte extrémy funkce

$$f(x, y) = -8x + 6y - 5$$

na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 100\}.$$

- Nalezněte extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x-2)^2 + y^2 \leq 9,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

Věta (Lagrangeovy multiplikátory – dvě vazby)

Nechť $n \geq 3$ *a nechť* $f : \mathrm{Dom}\ f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je* C^1 *funkce definována na okolí*

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) = 0,\ \ h(x) = 0\}$$

kde $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *jsou také* C^1*. Pokud* f *nabývá maxima vyhledem k* M *v bodě* x_0*, potom existují* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *takové, že*

$$\nabla f(x_0) + \lambda \nabla g(x_0) + \mu \nabla h(x_0) = 0,$$

nebo $\nabla g(x_0)$ *a* $\nabla h(x_0)$ *jsou lineárně závislé.*

Věta (Lagrangeovy multiplikátory – dvě vazby)

Nechť $n \geq 3$ *a nechť* $f : \mathrm{Dom}\ f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je* C^1 *funkce definována na okolí*

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) = 0,\ \ h(x) = 0\}$$

kde $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *jsou také* C^1. *Pokud* f *nabývá maxima vyhledem k* M *v bodě* x_0, *potom existují* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *takové, že*

$$\nabla f(x_0) + \lambda \nabla g(x_0) + \mu \nabla h(x_0) = 0,$$

nebo $\nabla g(x_0)$ *a* $\nabla h(x_0)$ *jsou lineárně závislé.*

Příklad

- Nalezněte extrémy funkce

$$f(x, y, z) = 3x^2 + y$$

vzhledem k vazbám

$$4x - 3y = 9 \quad \text{a } x^2 + z^2 = 9.$$

Další příklady

- Nalezněte extrémy funkce

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz$$

na množině

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,\ z \leq 1\}.$$

Triky a pasti

- Nalezněte maximum a minimum $f(x, y, z) = -y + xz$ na množině $M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 1\right\}$.

Příklady

- Nalezněte extrémy $f = x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 4$ na mmnožině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x-1)^2 + y^2 = 13, 3x + 2y - z + 12 = 0\}$.

Příklady

- Nalezněte extrémy $f = x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 4$ na mmnožině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x-1)^2 + y^2 = 13, 3x + 2y - z + 12 = 0\}$.

Aplikace

- Předpokládejte, že vlastníte továrnu vyrábějící nějaký výrobek z oceli. Vaše náklady jsou především lidská práce, která stojí \$20 za hodinu a člověka, a ocel samotná, která vyjde na \$170 za tunu.
  Předpokládejme, že tržba (revenue) R je přibližně dána rovnicí

$$R(h, s) = 200h^{2/3}s^{1/3},$$

  kde h jsou člověko-hodiny a s jsou tuny oceli. Jaká je maximální možná tržba, pokud je váš rozpočet \$20 000?