

Derivace a funkce více proměnných – opakování a úvod

Václav Mácha

Vysoká škola chemicko-technologická

Opakování první derivace:

Spočtete:

- $(3x + 65)'$
- $(2x^3 + 4x - 40)'$
- $(x^3 - 3x^{-2} + 2x^{-1} + 5x^{5/2})'$
- $(x^2 + \frac{1}{x})'$
- $(x + \sqrt{x} + x^{-2})'$
- $((2x + 1) \sin x)'$
- $(e^x(x^2 + 3x))'$
- $\left(\frac{x-3}{x^2+\sin x+4}\right)'$

další opakování derivace:

Počítejte dál:

- $(e^{x^2+2x})'$
- $(\sqrt{x^3 + 2x})'$
- $\left(\frac{\sin(2x)}{x^2+4}\right)'$
- $(ax^3 + 5ax^2 + 6a)'$, kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr
- $(e^{ax^2+2a})'$, kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr
- $\left(\frac{ax^2}{\sin ax}\right)'$, kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr

Funkce více proměnných

Funkce více proměnných

- Z jedné kávy má cukrárna zisk 40 Kč, z jednoho zákusku má zisk 60 Kč. Celkový zisk je

$$Z(x, y) = 40x + 60y$$

kde x je počet prodaných káv a y je počet prodaných zákusků. Jaká je derivace Z podle x (předpokládejme, že $y \in \mathbb{R}$ je parametr) a jaká je derivace Z podle y ?

Funkce více proměnných

- Z jedné kávy má cukrárna zisk 40 Kč, z jednoho zákusku má zisk 60 Kč. Celkový zisk je

$$Z(x, y) = 40x + 60y$$

kde x je počet prodaných káv a y je počet prodaných zákusků. Jaká je derivace Z podle x (předpokládejme, že $y \in \mathbb{R}$ je parametr) a jaká je derivace Z podle y ?

- Továrna vyrábí produkty A a B , jejich cena je 10\$ za kus A a 9\$ za kus B . Náklady na výrobu x kusů A a y kusů B jsou

$$400 + 2x + 3y + 0,01(3x^2 + xy + 3y^2).$$

Nalezněte množství výroby, které maximalizuje zisk.

Gradienty: Značení první derivace funkce (dle x):

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \text{ nebo } \frac{\partial}{\partial x} f$$

Druhé derivace funkce n proměnných je n^2 , takže pro dvě proměnné:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Obvykle nezáleží na pořadí derivací. Gradient je vektor prvních derivací, takže

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

druhý gradient jsou druhé derivace uspořádané do matice, například

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Příklad Spočtěte ∇f a $\nabla^2 f$ pro $f(x, y) = (x + y)y^2$.

Další příklady

- Spočtěte ∇f pro $f(x, y) = x^2 + xy^2 - y^3$.
- Spočtěte ∇f pro $f(x, y) = \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^2}$.
- Spočtěte ∇f pro $f(x, y) = \frac{x^2 y}{y^2 + 1}$.
- Spočtěte ∇f pro $f(x, y) = e^x(x + y)$.
- Spočtěte ∇f pro $f(x, y) = y\sqrt{x^2 + y}$.
- Spočtěte ∇f pro $f(x, y) = e^{xy} \left(x + \frac{1}{y} \right)$.
- Spočtěte ∇f a $\nabla^2 f$ pro $f(x, y, z) = x^2 + xy^2 + xyz + xz^3$.
- Spočtěte ∇f a $\nabla^2 f$ pro $f(x, y) = x^y$.