

# 1 Lineární algebra

## 1.1 Vektory

1. Necht  $u = (-1, 5)$ ,  $v = (2, 7, 3, 8)$ ,  $w = (4, 2, -6)$ .  
Spočítejte  $u + v$ ,  $u - v$ ,  $v - u$ ,  $v - w$ ,  $u + 2w$ ,  $3u - v$ ,  
 $u + v + w$ ,  $3u - 2v - 5w$ ,  $\frac{1}{2}w + \frac{3}{4}v - \frac{5}{2}u$ .

2. Jsou vektory

$$v_1 = (1, 1, 1, 2)$$

$$v_2 = (1, 2, -1, 1)$$

$$v_3 = (0, 1, 1, 2)$$

lineárně nezávislé?

3. Zjistěte, zda je  $u = (2, 0, -1)$  lineární kombinací  $v = (6, -2, 4)$  a  $w = (-3, -1, 2)$ .

4. Nalezněte hodnotu  $k \in \mathbb{R}$  takovou, že  $u = (k, 4, k)$  je lineární kombinací  $v = (-1, 2, 2)$  a  $w = (4, 2, 1)$ .

5. Polynom  $P(x) = x^2 + 3x + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  patří do lineárního obalu  $Q(x) = 2x^2 - 1$  a  $R(x) = x + 2$ . Určete hodnotu  $c$ .

6. Nalezněte  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  a  $\lambda_3$  tak, že

$$\lambda_1(2, 1, 3) + \lambda_2(0, -2, 0) + \lambda_3(1, 4, 2) = (9, 9, 14)$$

(poznámka:  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  jsou souřadnice  $(9, 9, 14)$  vzhledem k bázi

$$\{(2, 1, 3), (0, -2, 0), (1, 4, 2)\}.$$

## 1.2 Matice – úvod

1. Necht

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, B = (1 \ 2), C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Spočítejte

$$2A + BC, AB + C, CB - A, 2BA + C, B \left( C + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

2. Existuje  $\alpha \in \mathbb{R}$  tak, že

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 1.3 Matice – Gaussova eliminační metoda

1. Určete hodnotu matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Vyřešte

$$3x + y - z = 1$$

$$x - y + z = -3$$

$$2x + y + z = 0$$

3. Vyřešte

$$2x + 5y = 9$$

$$x + 2y - z = 3$$

$$-3x - 4z + 7z = 1$$

## 1.4 Čtvercové matice – úvod

7. Necht

$$u = (2, 4, 6), v = (-1, -2, -3), w = (-2, -4, -6).$$

Existuje vektor  $z$  takový, že  $u \notin \text{span}\{v, w, z\}$ ?

8. Jak dimenze

$$\text{span}\{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, k)\}$$

závisí na  $k$ ?

9. Rozhodněte, zda je  $b$  lineární kombinací  $a_1$ ,  $a_2$  a  $a_3$ , kde

$$a_1 = (1, -2, 2), a_2 = (0, 5, 5),$$

$$a_3 = (2, 0, 8), b = (-5, 11, 8).$$

10. Necht

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že  $\text{span}\{M_1, M_2, M_3\}$  je prostor všech symetrických matic.

má hodnotu 3?

3. Je lineární obal vektorů

$$(0, 0, -2), (0, -3, 8), (4, -1, -5)$$

celé  $\mathbb{R}^3$ ?

4. Určete hodnotu matice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  pomocí definice hodnoty.

4. Částka \$65,000 je investovaná do fondů s výnosem 6%, 8% a 10% ročně. Celkový roční příjem je \$4,800. Příjem ze třetího fondu je o \$600 větší než z druhého. Určete, kolik je do každého fondu zainvestováno.

5. Vyřešte

$$2x - 3y + z = 2$$

$$-x + 2y - z = -2$$

$$3x - 4y + z = 2$$

1. Ověřte, že

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Určete

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

3. Spočtete

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

4. Je matice  $X$ , která řeší

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

singulární, nebo regulární?

## 1.5 Čtvercové matice – determinanty

1. Spočtete

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ 1 - \lambda & 2 \end{pmatrix},$$

kde  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

2. Spočtete

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Spočtete

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Použijte Cramerovo pravidlo pro vyřešení

$$2x - y + z = 3$$

$$3x + 2y + z = 7$$

$$-x - y - 2z = -6.$$

5. Spočtete

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

## 1.6 Čtvercové matice – vlastní čísla a vektory

1. Určete vlastní čísla a vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 \\ 16 & 9 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Nalezněte vlastní čísla a vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Nalezněte matici, jejíž charakteristický polynom je  $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$ .

4. Nalezněte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

## 1.7 Čtvercové matice – kvadratické formy a definitnost

1. Napište kvadratickou formu  $Q$  jejíž matice je

- $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

2. Nalezněte matice příslušné ke kvadratickým formám

- $Q(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$
- $Q(x, y, z) = 2x^2 - 5xy + 3yz - 2z^2$
- $Q(x, y, z) = x(x + 2y) + (3x - y)(2x - 2y)$

3. Rozhodněte o definitnosti matice

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

## 2 Funkce

### 2.1 Definiční obor

1. Nalezněte definiční obor funkce  $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ .

2. Nalezněte definiční obor funkce  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ .

3. Nalezněte definiční obor funkce  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}}$ .

4. Nalezněte definiční obor funkce  $f(x) = \log(2x - x^2)$ .

5. Nalezněte definiční obor funkce  $f(x) = \sqrt{3 - \log x}$ .

6. Nalezněte definiční obor funkce  $f(x) = \sqrt[4]{x \log(x + 2)}$ .

## 2.2 Parita

1. Rozhodněte o paritě  $f(x) = x \sin x$ .

2. Rozhodněte o paritě  $f(x) = x^3 + 2$ .

3. Rozhodněte o paritě  $f(x) = xe^x$ .

4. Rozhodněte o paritě  $f(x) = \log \frac{2-x}{2+x}$ .

## 2.3 Inverzní funkce

1. Nalezněte  $f^{-1}$  pro  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}$ .

2. Nalezněte  $f^{-1}$  pro  $f(x) = 1 - \sqrt{x+2}$ .

3. Nalezněte  $f^{-1}$  pro  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$ ,  $x \in [2, \infty)$ .

4. Nalezněte  $f^{-1}$  pro  $f(x) = 3 - \frac{5}{x+1}$ .

5. Nalezněte  $f^{-1}$  pro  $f(x) = 3^{\frac{x+1}{x+3}}$ .

## 2.4 Limity

1. Vyřešte

$$\lim_{x \rightarrow 3} x + 2$$

2. Vyřešte

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 18}$$

3. Vyřešte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x^3 - x + 1$$

4. Vyřešte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{x^2 + 3}$$

5. Vyřešte

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x + 1}$$

6. Vyřešte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + x}$$

7. Vyřešte

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x + 2}{x^2 + 2x + 1}$$

8. Vyřešte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x}{x^3 - 1}$$

9. Vyřešte

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1}$$

10. Vyřešte

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 18}{x^2 - 8x + 16}$$

11. Vyřešte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

12. Vyřešte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$$

13. Vyřešte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}$$

14. Vyřešte

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x}$$

15. Vyřešte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

16. Vyřešte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{e^{2x} - e^{-2x}}$$

17. Vyřešte

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

18. Vyřešte

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{e^{x-1} - 1}$$

## 2.5 Derivace

1.

$$\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)'$$

2.

$$\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)'$$

3.

$$\left(\sqrt{x^2+5}\right)'$$

4.

$$\left(e^{x+x^2} \sin x\right)'$$

5.

$$\left(\frac{x^3 + x \sin x}{\sqrt{x^2+1}}\right)'$$

6.

$$\left(\sin\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\right)'$$

7.

$$\left(\sqrt{\sin(x^2)}\right)'$$

8.

$$\left(\sqrt{1 - \sin^2 x}\right)'$$

9.

$$\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{1+x^2}}}\right)'$$

10.

$$\left(\frac{2x}{x^2+4}\right)''$$

11.

$$\left(x\sqrt[3]{1+\sin^2 x}\right)''$$

## 2.6 Tečna

- Nalezněte tečnu ke grafu funkce  $f(x) = e^{x^2-1}$  v bodě  $A = [-1, 1]$ .
- Nalezněte tečnu ke grafu funkce  $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$  v bodě  $A = [1, ?]$ .

## 2.7 Průběh funkce $f$

- Načrtněte graf funkce  $f$  s následujícími vlastnostmi:  $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ , sudá, nemá derivaci v  $x = 0$ ,  $f' > 0$  na  $(-\infty, -1)$ ,  $f(0) = -2$ .
- Načrtněte graf funkce  $f$  s následujícími vlastnostmi:  $\text{Dom } f = (0, \infty)$ ,  $f(5) = 0$ ,  $f'(x) < 4$  na  $(0, 4)$  a  $f'(x) > 0$  na  $(4, \infty)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} = 5$ .
- Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 5.$$

## 2.8 l'Hospitalovo pravidlo

- Spočtete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}.$$

- Spočtete

$$\lim_{x \rightarrow 1} \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) \log x.$$

## 2.9 Taylorův polynom

- Nalezněte Taylorův polynom pátého řádu v bodě  $x_0 = 1$  funkce  $\log x$  (log značí přirozený logaritmus).
- Nalezněte Taylorův polynom šestého řádu v bodě  $x_0 = 0$  funkce  $\cos x$ .

# 3 Funkce více proměnných

## 3.1 Úvod

- Určete a načrtněte definiční obor následujících funkcí

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{1}{\ln(x^2 - y)}, & b(x) &= \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} \\ c(x) &= \sqrt{2 - |x+y|}, & d(x) &= \sqrt{x^2 + xy + 1} \\ e(x) &= \sqrt{\frac{1-|x|}{|y|-1}}, & f(x) &= x - \frac{3}{y} + \ln(x-3y). \end{aligned}$$

- Určete a načrtněte souřadnice ve výškách  $-2, -1, 0, 1, 2$  funkcí

$$\begin{aligned} a(x) &= x^2 + y, & b(x) &= x^2 - y^2 \\ c(x) &= |x| + |2 - y|, & d(x) &= \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \\ e(x) &= \frac{x+1}{y-2}, & f(x) &= \frac{x^2 + y^2}{2x + y}. \end{aligned}$$

12.

$$\left(e^{2x^2+x}\right)'''$$

- Nalezněte tečnu ke grafu funkce  $f(x) = 3 - x^2$ , jejíž směrnice je  $k = -2$ .
- Nalezněte tečnu ke grafu funkce  $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ , která je rovnoběžná k přímce  $y = 4 - x$ .

- Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x^2(4-x)^2.$$

- Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}.$$

- Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = (1 + \cos x) \sin x.$$

- Spočtete

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{1-x}}.$$

- Spočtete

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \log\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$

- Mějme funkci  $f(x) = e^{2x}$ . Nalezněte pro tuto funkci Taylorův polynom čtvrtého řádu  $T_4$  v bodě  $x_0 = 3$ . Použijte jej pro určení přibližné hodnoty  $f(3,31)$  a odhadněte chybu, kterou jste při této aproximaci udělali.

- Mějme

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x + y^2}.$$

Nalezněte a načrtněte její řez podél přímky

$$p : (x, y) = (1, 1) + t(-2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Napište  $g(t) = f(1+t, t^2)$ , kde

$$f(x, y) = x^2 + \sqrt{y},$$

uřece její definiční obor a načrtněte její graf.

### 3.2 Topologie

1. Nalezněte a načrtněte hranici množiny

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > y, y > x^2\}.$$

2. Určete, zda je množina

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 > y, y > 1\}$$

otevřená, nebo uzavřená. Odůvodněte svou odpověď.

### 3.3 Limity a spojitost

1. Určete

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{3x^2 + y^2}, & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy^2}{x^2 + 3y^4} \\ & \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{(x-2)(y-1)}{(x-2)^2 + (y-1)^2}, & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^3 + y^3} \\ & \lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} \frac{x^4 - y^4}{x^3 - y^3}, \quad a \in \mathbb{R}, & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x+y} \\ & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2y^2}{x^2 + y^2}, & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

3. Každou z následujících množin načrtněte a určete, zda je otevřená, nebo uzavřená.

(a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{9}(y-3)^2 \leq 1\}$

(b)  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \neq x^2\}$

(c)  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$

(d)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > \sin x\}$

### 3.4 Derivace

- Určete derivaci  $f$  ve směru  $v$  v bodě  $(x_0, y_0)$ , kde

1.  $f(x, y) = x^2 + 2y, v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right), (x_0, y_0) = (-1, 0),$

2.  $f(x, y) = y^2 \sin x, v = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), (x_0, y_0) = (2, 5),$

3.  $f(x, y) = x + e^{xy}, v = \left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right), (x_0, y_0) = (0, 0).$

- Spočtěte první parciální derivace následujících funkcí

$$a(x, y) = e^{x(y^2+xy)}, \quad b(x, y) = (x^2 + y) \sin x$$

$$c(x, y, z) = \frac{xe^y}{z+x}, \quad d(x, y) = (x^2 + 3xy)^{\ln(xy)}$$

$$e(x, y) = (x^2 + 2y) \cos(xy), \quad f(x, y) = \frac{(2x - 3y)^5}{x^2 - 1}$$

- Spočtěte  $\nabla^2$  funkcí

$$a(x, y) = x^y, \quad b(x, y) = \frac{x^2}{y}$$

$$c(x, y, z) = \frac{x+y}{y+z}, \quad d(x, y) = \frac{\sqrt{x}}{y^2+1}$$

$$e(x, y) = x\sqrt{x^2+y^2}, \quad f(x, y) = (x^2+y^2)^{-2}(x-y)^3$$

- Napište tečnou rovinu ke grafu funkce

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y}}$$

v bodě  $(x_0, y_0) = (2, 5).$

2. Spočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy + \sin(xy)}{xy} \right), \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 2xy + y^2)}{xy} \right)$$

- Napište tečnou rovinu ke grafu funkce

$$f(x, y) = \frac{\ln(x+3y)}{(x-1)y}$$

v bodě  $(x_0, y_0) = (-2, 1).$

- Mějme  $f(x, y) = x \sin(x+y^2), x(t) = t^2 + t$  a  $y(t) = e^t \ln t$ . Použijte řetízkové pravidlo k výpočtu

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x(t), y(t)).$$

- Napište Taylorův polynom druhého řádu v bodě  $(1, 1)$  pro funkci

$$f(x, y) = \ln(2y - x^2).$$

- Použijte Taylorův polynom druhého řádu k výpočtu přibližné hodnoty

$$2^{(1.9)^2 + (0.12)^2}.$$

- Napište Taylorův polynom druhého řádu v bodě  $(-1, 1, 2)$  pro funkci

$$f(x, y, z) = x^2 + (2xy)(z+3).$$

- Použijte Taylorův polynom druhého řádu k výpočtu přibližné hodnoty

$$\sqrt{(2.1)^2 + (1.9)^2 + (1.1)^2}.$$