

Matematika, funkce více proměnných

Václav Mácha

VŠCHT

Úvod – něco o kuželosečkách Středové rovnice kuželoseček:

- $x^2 + y^2 = r^2$ – kružnice o poloměru r
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – elipsa o osách délky a a b
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – hyperbola procházející osou x v bodech $[-a, 0]$ a $[a, 0]$, asymptoty $y = \pm \frac{b}{a}x$
- $y = 2px^2$ – parabola
- $xy = 1$ – hyperbola s osami $x = \pm y$

Příklady – určete a načrtněte kuželosečky:

- $x^2 + 4x + y^2 - 2y = 0$
- $x^2 + 4x - y = 0$
- $y^2 - 2x^2 + 8x = 7$
- $x - 4y^2 + 5 = 0$

Funkce více proměnných

Definition

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná. *Reálná funkce více proměnných* definovaná na M je zobrazení, které jednoznačně přiřadí hodnotu y k n -tici $(x_1, \dots, x_n) \in M$. Používáme notaci $y = f(x_1, \dots, x_n)$.

Příklady:

- Cena výrobku je c , počet prodaných výrobků je p . Potom tržba T je $T(p, c) = pc$.
- Částka uložená na spořicí účet je C , úrok je p v procentech. Po l letech bude na spořicí účet $P(C, p, l) = C \left(1 + \frac{p}{100}\right)^l$
- Cobb-Douglasova produkční funkce $f(x, y) = Ax^a y^b$ pro $A, a, b > 0$ na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$

Maximální definiční obor: jako obvykle, funkce jsou často zadány pouze svým předpisem bez specifikace definičního oboru. V takovém případě předpokládáme, že definiční obor je množina všech vstupů, pro které má předpis smysl.

Příklady: Nalezněte a načrtněte definiční obor funkce

- $f(x, y) = \log(x + y)$
- $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$
- $f(x, y) = \sqrt{1 - \log(y - x^2)}$

Trocha o topologii

Definition

Polynom funkce více proměnných je funkce, která vznikne součtem konečně mnoha jednočlenů, kde každý jednočlen je reálný násobek přirozených mocnin funkčních proměnných, nebo konstanta. Tedy

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}, \quad a_{i_1, \dots, i_n} \in \mathbb{R}, \quad i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Příklad:

- Funkce

$$x^3 - 2xy^2 + 2, \quad xyz - 2z^4 - 7, \quad 2z(x - 4) + y^2$$

jsou polynomy.

- Naproti tomu funkce

$$x\sqrt{y}, \quad \frac{x^2 + 4}{2y - 1}, \quad x^{1/3} + y^2$$

nejsou polynomy.

Pár slov o topologii:

Co je *otevřená množina*?

- Pro P polynom je $P^{-1}((-\infty, a))$ otevřená množina pro každé $a \in \mathbb{R}$.
- Pokud jsou A a B otevřené, pak je taky $A \cap B$ otevřená.
- Pokud jsou množiny A_i , $i \in I$ otevřené, pak i $\bigcup_{i \in I} A_i$ je otevřená.

Příklady:

- V \mathbb{R}^2 je \emptyset otevřená, \mathbb{R}^2 otevřená, ale taky 'vnitřek jednotkového kruhu' $\{x^2 + y^2 < 1\}$ je otevřená. Proč?
- Čtverec $(0, 1) \times (0, 1)$ je otevřená množina.
- Množina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| > 2, |y| > 2\}$ je otevřená.

Co je *uzavřená množina*?

- Pokud je A otevřená, její doplněk je uzavřená.
- Ale taky, pro polynom P je $P^{-1}((-\infty, a])$ uzavřená pro každé $a \in \mathbb{R}$.
- Pokud jsou A a B uzavřené, pak taky $A \cup B$ je uzavřená.
- Pokud jsou množiny A_i , $i \in I$ uzavřené, pak i $\bigcap_{i \in I} A_i$ je uzavřená

Příklady:

- \emptyset a \mathbb{R}^2 jsou obě uzavřené v \mathbb{R}^2 . Proč?
- Množina $\{(x, y), x \in [-1, 1], y \leq x^2\}$ je uzavřená. Proč?

Vnitřek množiny

- Vnitřek množiny A se značí A^0 , jde o největší otevřenou množinu, která je uvnitř A . Pro polynom P a reálné číslo a je množina $P^{-1}((-\infty, a))$ vnitřkem množiny $P^{-1}((-\infty, a))$.
- Pro A otevřenou je $A^0 = A$.

Příklady

- Napište vnitřek množiny $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- Proč není množina $(0, 1) \times [0, 1]$ otevřená?

Uzávěr množiny

- Uzávěr množiny A se značí \bar{A} a jde o nejmenší uzavřenou množinu, která obsahuje A . Pro polynom P a reálné číslo a je množina $P^{-1}((-\infty, a])$ uzávěrem množiny $P^{-1}((\infty, a))$.
- Pro A je uzavřenou je $\bar{A} = A$.

Příklady

- Napište uzávěr množiny $\{(x, y), x + y > 0, x^2 + y^2 < 16\}$
- Proč není množina $(0, 1) \times [0, 1]$ uzavřená?

Hranice množiny

- Pro množinu A je hranice množiny ∂A dána předpisem

$$\partial A = \bar{A} \setminus A^0.$$

Příklady:

- Napište hranici množiny $(0, 1) \times [0, 1]$.
- Napište hranici množiny $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y^2 \neq 0\}$.

Příklady:

- Je množina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > y^2 \text{ or } y > 0\}$ uzavřená, nebo otevřená? Zdůvodněte.
- Rozhodněte o otevřenosti nebo uzavřenosti definičního oboru funkce $f(x, y) = \log(x \log(x + y))$. Definiční obor zakreslete. Jaká je hranice tohoto definičního oboru?
- Je množina $\{(1, 1), (-1, 1), (0, 2)\}$ uzavřená, nebo otevřená?
- Je definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{x^2 - 4y^2 + 4}{x}$ otevřený nebo uzavřený? Definiční obor zakreslete.
- Napište hranici množiny $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y < 2, y \geq x^2\}$.
- **Pozor:** Jaká je hranice množiny $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^3 + x^2 < 0\}$?

Definition

Mějme $z = f(x, y)$ funkci dvou proměnných. Graf funkce f je množina

$$\text{graph} f = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in D f\}.$$

Příklad

- Načrtněte graf funkce $f(x, y) = -x - 2y + 3$.
- Načrtněte graf funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Definition

Vrstevnice funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ve výšce $z_0 \in \mathbb{R}$ je množina

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = z_0\}.$$

Příklady:

- Načrtněte vrstevnice funkce

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x}$$

ve výškách $z_0 = -2, -1, 0, 1, 2$.

- Načrtněte vrstevnice funkce

$$f(x, y) = (x + y) + |x + y|$$

ve výškách $z_0 = -2, -1, 0, 1, 2$.

Definition

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Mějme křivku $\varphi : I \rightarrow M$ (zde $I \subset \mathbb{R}$ je interval). Pak $f \circ \varphi$ je řez f dle φ .

Příklad:

- Jaký je graf funkce

$$f(x, y) = (x + y)^2$$

podél přímky $p_a : (x, y) = (a, 0) + t(1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$. A co podél přímky $q_b : (x, y) = (b, 0) + t(1, -1)$, $t \in \mathbb{R}$ pro nějaké $b \in \mathbb{R}$?

- Načrtněte graf řezu funkce

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

dle přímky

$$(x, y) = t(\cos \alpha, \sin \alpha), t \in (0, \infty),$$

kde $\alpha \in [0, 2\pi)$ je parametr.

Pár dalších slov o množinách

Okolí bodu (x_0, y_0) je

$$B_\delta(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$$

pro nějaké $\delta > 0$. Prstencové okolí je $B_\delta(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$.

Limitní bod množiny M je takový bod (x_0, y_0) takový, že

$$\forall \delta > 0 \quad B_\delta(x_0, y_0) \cap M \neq \emptyset.$$

Limita funkce

Definice

Nechť (x_0, y_0) je limitní bod $M \subset \mathbb{R}^2$ a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že limita f v bodě (x_0, y_0) je $A \in \mathbb{R}$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in (M \cap B_\delta(x_0, y_0)), |f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Píšeme $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = A$.

Limita funkce

Definice

Nechť (x_0, y_0) je limitní bod $M \subset \mathbb{R}^2$ a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že limita f v bodě (x_0, y_0) je $A \in \mathbb{R}$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in (M \cap B_\delta(x_0, y_0)), |f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Píšeme $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = A$.

Řekneme, že limita f v bodě (x_0, y_0) je ∞ , pokud

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in (M \cap B_\delta(x_0, y_0)), f(x, y) > M.$$

Píšeme $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \infty$.

Pozorování (Aritmetika limit)

Nechť f a g jsou dvě funkce a necht' (x_0, y_0) je limitní bod $D f$ a $D g$. Pak

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f + g)(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) + \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} fg(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f}{g}(x, y) = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y)}.$$

pokud má pravá strana smysl.

Pozorování (Aritmetika limit)

Nechť f a g jsou dvě funkce a necht' (x_0, y_0) je limitní bod $D f$ a $D g$. Pak

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f + g)(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) + \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} fg(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f}{g}(x, y) = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y)}.$$

pokud má pravá strana smysl.

Pozorování

Funkce f je spojitá v bodě $(x_0, y_0) \in D f$ právě tehdy když

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Příklady

- Spočtete

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-5,2)} xy \cos(5y + 2x).$$

- Vyšetřete

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(2x + y)^2}{x^2 + y^2}.$$

- Funkce

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

není definovaná v bodě $(0, 0)$. Je možné ji v tomto bodě dodefinovat tak, aby byla funkce spojitá?

Lemma o dvou policajtech

Nechť f , g , h jsou funkce definované na $B_\delta(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$ pro nějaké $\delta > 0$. Nechť

$$g(x, y) \leq f(x, y) \leq h(x, y).$$

Pokud existuje $A \in \mathbb{R}^*$ tak, že

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) \\ = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} h(x, y) = A, \end{aligned}$$

potom taky

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = A.$$

Příklad: Ukažte, že $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.



Obrázek: O dvou policajtech

Příklady

$$\blacksquare \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-4y}{6y+7x}$$

$$\blacksquare \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\blacksquare \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x^2-2xy}{x^2-4y^2}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-2y}{3x+y} \right)$$

$$\blacksquare \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2y}{3x+y} \right)$$

$$\blacksquare \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^4}$$

$$\blacksquare \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

$$\blacksquare \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2y^2}{x^2+y^2}$$

$$\blacksquare \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^3y}{x^2+y^2}$$

$$\blacksquare \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

Derivace funkcí více proměnných

Definice

Mějme $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $v \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\|v\| = 1$. Necht' $x_0 \in M^0$.
Derivace f ve směru v v bodě x_0 je

$$Df(x_0, v) = g'(t)|_{t=0} \text{ kde } g(t) = f(x_0 + tv)$$

Směr libovolného vektoru v je jednotkový vektor $\frac{v}{\|v\|}$.

Derivace funkcí více proměnných

Definice

Mějme $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $v \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\|v\| = 1$. Necht' $x_0 \in M^0$. Derivace f ve směru v v bodě x_0 je

$$Df(x_0, v) = g'(t)|_{t=0} \text{ kde } g(t) = f(x_0 + tv)$$

Směr libovolného vektoru v je jednotkový vektor $\frac{v}{\|v\|}$.

Příklady:

- Jaký je směr přímky $p : (x, y) = (2, -1) + t(1, 3)$?
- Mějme $f(x, y) = x^2 e^y$. Spočtete $Df \left((1, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)$.
- Pro funkci $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$ spočt vete $Df((1, 0), (1, 0))$ a $Df((1, 0), (0, 1))$.

Parciální derivace

Definition

Mějme $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in M^0$. Necht' e_i je vektor ve směru osy x_i . Směrová derivace

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(\bar{x}) = Df((\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n), e_i),$$

se nazývá *parciální derivace* ve směru x_i v bodě x .

Parciální derivace

Definition

Mějme $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in M^0$. Nechť e_i je vektor ve směru osy x_i . Směrová derivace

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(\bar{x}) = Df((\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n), e_i),$$

se nazývá *parciální derivace* ve směru x_i v bodě x .

Příklady

- Nechť $f(x, y) = \frac{x(\sin y)}{1+x^2}$. Spočtete $\frac{\partial}{\partial x} f((1, 1))$ a $\frac{\partial}{\partial y} f((1, 1))$.
- Spočtete $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ a $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ pro funkci z předchozího cvičení.

Parciální derivace

Definition

Mějme $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in M^0$. Nechť e_i je vektor ve směru osy x_i . Směrová derivace

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(\bar{x}) = Df((\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n), e_i),$$

se nazývá *parciální derivace* ve směru x_i v bodě x .

Příklady

- Nechť $f(x, y) = \frac{x(\sin y)}{1+x^2}$. Spočtete $\frac{\partial}{\partial x} f((1, 1))$ a $\frac{\partial}{\partial y} f((1, 1))$.
- Spočtete $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ a $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ pro funkci z předchozího cvičení.

Poznámka: gradient f je vektor parciálních derivací. Konkrétně

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f, \frac{\partial}{\partial x_2} f, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f \right).$$

Příklady: Spočtěte gradienty funkcí

- $f(x, y) = 4x^2 + 5y^3 + 26xy^2 - 12\sqrt[3]{x}\sqrt{y}$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2y + y^2 + x}$
- $f(x, y) = (x^2 + xy)e^{x^2y}$
- $f(x, y) = \frac{x^2 + \sin(xy)}{1 + y^2}$
- $f(x, y, z) = xe^{yz}$
- $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2^3(x_1^2 - e^{x_3x_4})$

Definice

Definujeme druhé derivace následovně:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right),$$

kdykoli $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$. Podobně definujeme třetí a vyšší derivace.

Příklady

- Spočtete druhé derivace funkce

$$f(x, y) = \frac{x}{y} - e^{xy}.$$

- Napište druhé derivace funkce

$$f(x, y) = x^2 \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Definition

Matice druhých derivací

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right)$$

se nazývá *Hessova matice* f . Značí se $\nabla^2 f$.

Pozorování Mějme $f \in C^2$, pak

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Hessova matice $\nabla^2 f$ je symetrická matice typu (n, n) .

Příklady:

- Spočtete Hessovu matici funkce $f(x, y) = x^2 + e^x \sin y$.
- Spočtete Hessovu matici funkce $f(x, y, z) = x^2 + xyz - z^2$.

Theorem (Řetízkové pravidlo)

Mějme $n, m \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Pak

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$.

Příklady

- Mějme $f(x) = g(\sin x, \cos x)$. Pak

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial a} \cos x - \frac{\partial g}{\partial b} \sin x.$$

- Spočtěte $\frac{\partial f}{\partial t}$, kde

- 1 $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2$, $x = x(t) = \sin t$ and $y = y(t) = \cos t$,

- 2 $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$, $x = x(t) = e^{2t}$ and $y = y(t) = e^{-t}$.

Další příklady na derivace:

- Spočtěte $\nabla \left(x^2 y^3 - \frac{x^2}{y} + \frac{5}{x} \right)$.
- Spočtěte $\nabla^2 \left(\frac{x^2 e^y}{y} \right)$.
- Spočtěte $\nabla \left(\sin \left(\frac{x^2}{x+yz} \right) e^{z^2} \right)$
- Napište $\nabla^2 \left(x + \frac{x+y^2}{z} \right)$.
- Pomocí řetízkového pravidla spočtěte $\frac{\partial f}{\partial t}$, kde $f = f(x, y, z) = (x + z)e^{yz}$ a $x = e^t$, $y = \log t$, $z = t^2$.

Diferenciál

Mějme funkci $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Zkusíme spočítat přírůstek, pokud se pohneme z bodu (x_0, y_0) do bodu $(x_0 + h, y_0 + k)$, tedy

$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$. Můžeme to zapsat jako

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Předpokládejme, že $|h|$ a $|k|$ jsou malé. Pak

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) \sim \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0)k$$

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) \sim \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h$$

Navíc, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0) \sim \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, pokud $f \in C^1$. To dává

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \sim \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k.$$

Označíme dx změnu v souřadnici x a dy změnu v souřadnici y .

Definice

Nechť $f : M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je taková, že f má spojité první derivace. Pak

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$$

se nazývá diferenciál f v bodě (x_0, y_0) .

Označíme dx změnu v souřadnici x a dy změnu v souřadnici y .

Definice

Nechť $f : M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je taková, že f má spojité první derivace. Pak

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$$

se nazývá diferenciál f v bodě (x_0, y_0) .

Příklady

- Napište diferenciál funkce $f(x, y) = x^2y - y^2$.
- Spočtete $\sqrt{(0.03)^2 + (2.89)^2}$ pomocí diferenciálu.
- S pomocí diferenciálu spočtete $\log(1.04) + \sqrt{(3.2)^2 + (3.8)^2}$.
- Spočtete $f(1, 11; 0, 58)$, je-li $f(x, y) = x^3 + 4y^3$.

Označíme dx změnu v souřadnici x a dy změnu v souřadnici y .

Definice

Nechť $f : M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je taková, že f má spojité první derivace. Pak

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$$

se nazývá diferenciál f v bodě (x_0, y_0) .

Příklady

- Napište diferenciál funkce $f(x, y) = x^2y - y^2$.
- Spočtete $\sqrt{(0.03)^2 + (2.89)^2}$ pomocí diferenciálu.
- S pomocí diferenciálu spočtete $\log(1.04) + \sqrt{(3.2)^2 + (3.8)^2}$.
- Spočtete $f(1, 11; 0, 58)$, je-li $f(x, y) = x^3 + 4y^3$.

Poznamenejme, že $df(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (dx, dy)$. Ve více dimenzích máme

$$df(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot (dx_1, \dots, dx_n).$$

Definition

Nechť $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má spojité derivace v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pak *tečná rovina* grafu f v bodě x_0 je rovina s rovnicí

$$z = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Definition

Nechť $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má spojitě derivace v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pak *tečná rovina* grafu f v bodě x_0 je rovina s rovnicí

$$z = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Příklad

- Spočtete tečnou rovinu f v bodě $(1, 2)$ pro $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.
- Nechť je dána funkce $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$. V bodě $(1, 2)$ určete rovnici tečny a diferenciál funkce f s přírůstky $dx = \frac{1}{2}$ a $dy = \frac{1}{2}$.

Definition

Definujeme Taylorův polynom druhého řádu v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pomocí vzorce

$$T_2(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)\nabla^2 f(x - x_0)^T$$

Definition

Definujeme Taylorův polynom druhého řádu v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pomocí vzorce

$$T_2(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)\nabla^2 f(x - x_0)^T$$

Příklady

- Napište Taylorův polynom druhého řádu funkce $f(x, y) = \frac{x+1}{y^2} \log y$ v bodě $(1, 1)$.
- Napište Taylorův polynom druhého řádu funkce $f(x, y) = \log\left(\frac{1}{xy}\right)$ v bodě $(-2, -3)$.
- Nalezněte přibližnou hodnotu $\sqrt{(0.03)^2 + (2.89)^2}$ pomocí Taylorova polynomu druhého řádu.

Příklad za života

Předpokládejme, že spotřebitel jménem Homer Simpson konzumuje různá množství piva $Duff$ a vepřových škvarků. Nechť P označuje množství zkonsumového piva a S označuje množství zkonsumovaných škvarků. Homer získává užitek ze spotřeby těchto statků podle následující užitkové funkce

$$U = f(P, S) \quad \text{například } f(P, S) = \theta + \alpha \log P + (1 - \alpha) \log S$$

Homer má omezený rozpočet, protože platí

$$p_P P + p_S S = R. \quad (\text{rozpočet})$$

Jaké množství piva a škvarků maximalizuje jeho užitek?

Příklad za života

Předpokládejme, že spotřebitel jménem Homer Simpson konzumuje různá množství piva Duff a vepřových škvarků. Nechť P označuje množství zkonsumovaného piva a S označuje množství zkonsumovaných škvarků. Homer získává užitek ze spotřeby těchto statků podle následující užitkové funkce

$$U = f(P, S) \quad \text{například } f(P, S) = \theta + \alpha \log P + (1 - \alpha) \log S$$

Homer má omezený rozpočet, protože platí

$$p_P P + p_S S = R. \quad (\text{rozpočet})$$

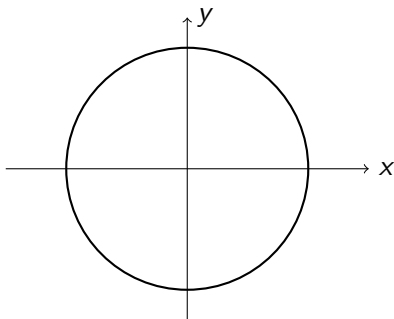
Jaké množství piva a škvarků maximalizuje jeho užitek?

Zůstává otázka: co když je rovnice (rozpočet) složitější (například existuje množstevní sleva)? Co když je (rozpočet) taková, že nelze vyjádřit P pomocí S ? Například $p_P = \gamma e^{-P}$ a $p_S = \delta(1 + \epsilon S^5)$?

Implicitně daná funkce

Uvažujme množinu

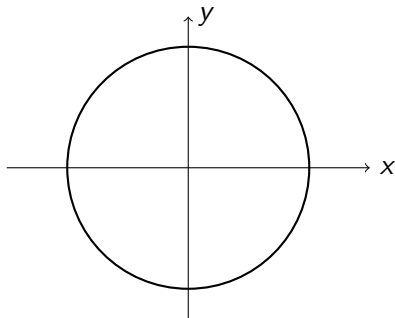
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$$



Implicitně daná funkce

Uvažujme množinu

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$$



Rovnice $x^2 + y^2 = 1$ definuje dvě funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$, kde

$$y_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad D y_1(x) = [-1, 1],$$

$$y_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}, \quad D y_2(x) = [-1, 1].$$

Co když je nemožné vyjádřit y ? Uvažujme rovnici

$$f(x, y) = 0.$$

Co musíme předpokládat, abychom dostali jednoznačně určenou funkci $y(x)$?

Co když je nemožné vyjádřit y ? Uvažujme rovnici

$$f(x, y) = 0.$$

Co musíme předpokládat, abychom dostali jednoznačně určenou funkci $y(x)$?

Theorem

Mějme $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Pokud

- i $f \in C^k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$,*
- ii $f(x_0, y_0) = 0$,*
- iii $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$,*

pak existuje jednoznačně určená funkce $y(x)$ třídy C^k na okolí bodu x_0 taková, že $f(x, y(x)) = 0$. Neboli, existuje $\varepsilon > 0$ a funkce $y(x)$ definovaná na $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ taková, že $f(x, y(x)) = 0$.

Příklad Uvažujte rovnici

$$x^3 + y^3 - 3xy - 3 = 0.$$

Existuje funkce $y(x)$ určená touto rovnicí na okolí bodu $(1, 2)$?

Poslední předpoklad věty o implicitní funkci nemůže být vynechán.
Uvažujme rovnici

$$x^2 + y^2 = 1$$

na okolí bodu $(1, 0)$.